I. Nozioni fondamentali

1. La nozione di Algebra di Lie.

Sia A uno spazio vettoriale definito su un arbitrario campo F:

Definizione 1. *Diremo che A è un'* **algebra su F**, *se è definita su A un'operazione bilineare, i.e. un'applicazione* $A \times A \to A$ *(generalmente chiamata prodotto e denotata mediante la semplice giustapposizione) tale che:*

$$(ax+by)z = a(xz)+b(yz)$$
$$x(ay+bz)= a(xy)+b(xz)$$

per ogni $a,b \in F$, *e per ogni* $x,y,z \in A$.

(Se, in particolare, il prodotto è associativo e ammette unità, si ritrova così l'usuale nozione di *algebra associativa*)

Definizione 2. *Sia A un'algebra su F. Diremo che il prodotto definito su A è* **alternante** *se si ha:*

$$\mathbf{xx = 0}$$

per ogni $x \in A$.

Osservazione: Si noti che , se il prodotto è alternante, per ogni $x,y \in A$ si ha:

$$\mathbf{xy = - yx} \qquad (°)$$

Infatti è: $0 = (x+y)(x+y) = xx + yx + xy + yy = yx + xy$.

Inversamente, *se car* $F \neq 2$, la condizione (°) implica che il prodotto è alternante.

Definizione 3. *Un'applicazione lineare* δ: $A \to A$ *si dice* **derivazione** *se soddisfa alla regola:*

$$\boldsymbol{\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y}$$

per ogni $x,y \in A$.

Se V è uno spazio vettoriale su un campo F, si denoterà con **End(V)** l'insieme degli endomorfismi di V, i.e. delle applicazioni lineari $V \to V$. Come è ben noto, End(V) è uno spazio vettoriale su F rispetto alle usuali operazioni di somma di endomorfismi e di prodotto di uno scalare per un'endomorfismo. E rispetto all'usuale prodotto di endomorfismi, lo spazio End(V) ha evidentemente la struttura di un'algebra (associativa) su F nel senso della Def. 1.

E' però possibile dare a End(V) la struttura di un'algebra *non associativa* su F, definendo il nuovo prodotto :

$$\mathbf{[x,y] = xy - yx} \qquad \text{per ogni } x,y \in End(V).$$

Questa nuova algebra, per distinguerla dall'algebra associativa End(V), viene denotata con il simbolo **gl(V)**, e prende il nome di **algebra generale lineare** (su V). Il prodotto **[,]** prende il nome di **bracket**, o anche **commutatore** di x e y.

Sia ora A un'algebra su un campo F, e si denoti con **Der(A)** l'insieme di tutte le derivazioni di A. Si vede facilmente che Der(A) è un sottospazio dello spazio End(A). Si verifica altresì che Der(A) è chiuso rispetto al bracket, i.e.
se $\delta , \eta \in Der(A)$, anche $[\delta, \eta] \in Der(A)$ (mentre non necessariamente $\delta\eta \in Der(A)$). Dunque Der(A) è una *sottoalgebra* di gl(A) (che prende il nome di **algebra delle derivazioni** di A).
Notiamo infine che ad ogni elemento x di A si può associare l'applicazione ad x : $A \to A$ definita ponendo, per ogni $y \in A$

$$(\mathrm{ad}\ x)(y) = xy.$$

E' immediato vedere che ad x $\in$ End(A). Diremo che ad x è l'**aggiunta** di x.

Possiamo ora dire che cosa si intenda per "algebra di Lie" :

Definizione 4. *Un'algebra L su un campo F si dice* **algebra di Lie** *se :*
i) il prodotto definito su L è alternante;
ii) per ogni $x \in L$, l'aggiunta ad x è una derivazione.

Notazione: Se L è un'algebra di Lie, per denotare il prodotto useremo il simbolo [ ] , e chiameremo genericamente tale prodotto **bracket**.

La notazione scelta è motivata anche dal fatto che *l'algebra generale lineare gl(V) è un'algebra di Lie* rispetto al bracket. i) è banalmente verificata. Per quanto riguarda ii), si osservi che, per ogni $y,z \in gl(V)$, è $(\mathrm{ad}\ x)[y,z] = [x,[y,z]] = x(yz-zy)-(yz-zy)x$, e $[y,(\mathrm{ad}\ x)z] + [(\mathrm{ad}\ x)y,z] = [y,[x,z]] + [[x,y],z] = y(xz-zx) -(xz-zx)y + (xy-yx)z - z(xy-yx) = -yzx -xzy +xyz +zyx = x(yz-zy) -(yz-zy)x$.

La condizione ii) significa che , per ogni $x,y,z \in L$, si ha :

$$[x[yz]] = [y[xz]] + [[xy]\ z]$$

ovvero :

$$\mathbf{[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0} \qquad (*)$$

La (*) è la **identità di Jacobi.**

Avvertenza!! : *Salvo avviso contrario, noi considereremo esclusivamente algebre di Lie aventi, come spazi vettoriali, dimensione finita su F.*

Definizione 5. *Diremo che due algebre di Lie L_1, L_2 sono* **isomorfe** *se esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $\phi : L_1 \rightarrow L_2$ tale che , per ogni $x,y \in L_1$, sia $\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)]$. (Si dirà allora che ϕ è un* **isomorfismo** *di algebre di Lie.)*

Definizione 6. *Sia L un'algebra di Lie. Diremo che un sottospazio K di L è una* **sottoalgebra** *di L se K è chiuso rispetto al bracket, cioé se per ogni $x,y \in K$, è $[xy] \in K$. (In particolare, K è un'algebra di Lie rispetto alle operazioni indotte da L.)*

Notazione. Se X,Y sono sottoinsiemi di un'algebra di Lie L, denoteremo con il simbolo **[X Y]** (e chiameremo bracket di X e Y) il sottospazio di L generato dai brackets [xy] , $x \in X$, $y \in Y$. In particolare dunque, un sottospazio K di L è una sottoalgebra di L sse $K \supseteq [KK]$.

Definizione 7. *Si dice* **algebra di Lie lineare** *ogni sottoalgebra di un'algebra generale lineare gl(V).*

Definizione 8. *Un'algebra di Lie L si dice* **abeliana** *se è $[xy] = 0$ per ogni $x,y \in L$.*

Oss. : 1) Un'algebra lineare L è abeliana se e solo se per ogni $x,y \in L$, x e y commutano rispetto all'ordinario prodotto di applicazioni.

2) In generale, se car $F \neq 2$, un'algebra di Lie L è abeliana se e solo se per ogni $x,y \in L$ è $[xy] = [yx]$.

3) A un qualsiasi spazio vettoriale V si può dare la struttura di un'al-

gebra di Lie abeliana definendo $[xy] = O$ per ogni $x,y \in L$.

4) A meno d'isomorfismi, vi è una e una sola algebra di Lie abeliana di assegnata dimensione n su F.

Se L è un'algebra di Lie di dimensione n su un campo F, e $(x_i \mid 1 \leq i \leq n)$ è una base di L su F, la struttura di L come algebra di Lie (i.e. la sua tavola di moltiplicazione) è completamente determinata dai brackets $[x_i\ x_j]$. Inversamente, resta definita una struttura di algebra di Lie su uno spazio L su F con base $(x_i \mid 1 \leq i \leq n)$, non appena si assegnino dei brackets $[x_i\, x_j]$ soddisfacenti le condizioni : (*) $[x_i\ x_i] = 0$ e $[x_i\ x_j] = -[x_j\ x_i]$, $1 \leq i , j \leq n$, e la identità di Jacobi (**) $[x_i\, [x_j\, x_k]\ + [x_j\, [x_k\, x_i]\ + [x_k\, [x_i\, x_j]\ = 0$, $1 \leq i , j , k \leq n$, e si estenda per bilinearità. E' altresì evidente che basta assegnare i brackets per $i \leq j$.

2. Esempi di algebre di Lie.

I) Algebre di Lie di dimensione ≤ 3

Sia L un'algebra di Lie su un assegnato campo F.

Se dim L = 1 :

L è necessariamente abeliana, poichè , se (x) è una base di L, è $[x\ x] = 0$.

Se dim L = 2 :

Sia (x,y) una base di L. Allora il bracket di due qualsiasi elementi di L è un multiplo secondo uno scalare di [xy]. Se [xy] = 0, L è abeliana. Se $[xy] \neq 0$, si può rimpiazzare x nella base con [xy] e scegliere come nuovo y un qualsiasi vettore indipendente dal nuovo x. Allora si ha $[xy] = ax$, con $0 \neq a \in F$. Rimpiazzando y con $a^{-1}y$ si ottiene finalmente $[xy] = x$, e si conclude perciò che esiste al più una sola algebra non-abeliana di dimensione 2 sul campo F. D'altra parte si vede subito che assegnando $[xy] = x$ sono soddisfatte le condizioni affinché L abbia una struttura di Lie.

Se dim L = 3 :

Vi sono varie algebre di Lie 3-dimensionali non-abeliane. Per la loro classificazione cfr. ad es. Jacobson, "Lie Algebras" pp.11-14. Noi qui ci limiteremo ad illustrare alcuni notevoli esempi.

1) Sia (x,y,z) una base di L, e si ponga $[xy] = z$, $[yz] = x$, $[zx] = y$ (oltre naturalmente alle relazioni (*) per l'alternanza). Vale l'identità di Jacobi, e
si ottiene quindi un'algebra di Lie. Se F è il campo reale **R**, questa è l'algebra che si ottiene definendo in $\mathbf{R}^3$ $[uv] = u \times v$ (il familiare prodotto vettoriale).

2) Sia (x,y,z) una base di L, e si ponga $[xy] = z$, $[zx] = 0$, $[zy] = 0$. Con queste relazioni L ha la struttura di algebra di Lie. Quest'algebra viene detta **algebra di Heisenberg**.

3) Sia (x,y,h) una base di L, e si ponga $[xy] = h$, $[hx] = 2x$, $[hy] = -2y$. Con queste relazioni si ottiene un'algebra di Lie (che coincide con la precedente se car F = 2). Se car F $\neq$ 2, ad h ha gli autovalori distinti 0,2,-2

(in particolare ad h è diagonalizzabile, e h è un autovettore di ad h con autovalore 0). Quest'algebra, come vedremo, è *semplice*, e svolge un ruolo importante nella teoria di Lie.

II) Algebre lineari: le algebre classiche.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo F, e si consideri l'**algebra generale lineare gl(V)**. Come è ben noto, fissata una base ordinata $\underline{b} = (v_1,....,v_n)$ in V, ad ogni a $\in$ gl(V) è possibile associare la matrice rappresentativa n $\times$ n $M_{\underline{b}}(a) = (a_{ij})$ definita da : $a(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$, $a_{ij} \in K$. In tal modo, gl(V) è identificata con l'algebra delle matrici n $\times$ n su F (rispetto al "commutatore" [A,B] = AB -BA di matrici), e viene allora di solito denotata con **gl(n,F)**.
L'algebra generale lineare gl(n,F) ha dimensione n^2 sul campo F. E' chiaro infatti che le n^2 matrici $\mathbf{e}_{ij}$ aventi 1 nel posto (i,j) e 0 altrove, formano una base di gl(n,F) (a volte detta **base standard**). Rispetto alla base standard, per la quale valgono le relazioni : $e_{ij}\, e_{kl} = \delta_{jk}\, e_{il}$, il bracket ha una forma particolarmente semplice. Precisamente :

$$[\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{kl}] = \boldsymbol{\delta}_{jk}\, \mathbf{e}_{il} - \boldsymbol{\delta}_{li}\, \mathbf{e}_{kj} .$$

Descriveremo ora alcune notevoli algebre lineari, che sono chiamate **algebre classiche**, poichè sono legate ad alcuni dei gruppi di Lie classici.
Le algebre classiche appartengono a quattro famiglie, o **tipi** , denotati con i simboli $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$, $\mathbf{D_n}$ $(n \geq 1)$.

$\mathbf{A_n}$:

Sia dim V = n+1, e si denoti con **sl(V)** l'insieme degli endomorfismi di V che hanno traccia nulla, identificabile con l'insieme **sl(n+1,F)** delle matrici di ordine n+1 su F aventi traccia nulla. Poichè , se A,B sono matrici dello stesso ordine, Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B) e Tr(AB) = Tr(BA), si ha subito che sl(n+1,F) è una sottoalgebra di gl(n+1,F). sl(V), ovvero sl(n+1,F), prende il nome di **algebra speciale lineare** (su V).
sl(n+1,F) è una sottoalgebra propria di gl(n+1,F), e dunque ha dimensione $\leq (n+1)^2 - 1$. D'altra parte una *base standard* per sl(n+1,F) costituita precisamente da $(n+1)^2 - 1$ elementi si ottiene considerando le matrici di traccia zero e_{ij} per $i \neq j$ e $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ per $1 \leq i \leq n$.
Consideriamo il caso n = 1, ovvero l'algebra **sl(2,F)**. Allora la base standard è formata dalle matrici $x = e_{12}$, $y = e_{21}$, $h = e_{11} - e_{22}$. Il calcolo dei brackets ci dà: [x,y] = h, [h,x] = 2x, [h,y] = -2y. Ritroviamo cioè l'algebra 3-dimensionale introdotta in I), 3).

$\mathbf{C_n}$:

Sia dim V = 2n, e sia f la forma bilineare antisimmetrica definita , rispetto a una assegnata base $(v_1, \ldots, v_{2n})$ di V , dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

(i.e. $f(v_i, v_j) = a_{ij}$) . Si denoti con **sp(V)** l'insieme di tutti gli endomorfismi x di V tali che f(x(u),v) = - f(u,x(v)) per ogni u,v $\in$ V. sp(V) è un sottospazio di gl(V). Inoltre, se x,y $\in$ sp(V), si ha f([x,y](u),v) = f((xy-yx)(u),v) = f(xy(u),v) - f(yx(u),v) = - f(y(u),x(v)) + f(x(u),y(v)) = f(u,yx(v)) - f(u,xy(v)) = f(u,(yx-xy)(v)) = - f(u,[x,y](v)). Dunque [x,y] $\in$ sp(V), e sp(V) è una sottoalgebra di gl(V). sp(V) prende il nome di **algebra simplettica** (su V).
L'algebra simplettica **sp(2n,F)** è costituita da tutte le matrici X di gl(2n,F) tali che $AX = -X^tA$. Se decomponiamo X in blocchi:

$$X = \begin{bmatrix} L & M \\ N & P \end{bmatrix}$$

(con $L,M,N,P \in gl(n,F)$), la condizione $X \in sp(2n,F)$ si traduce nelle condizioni $L^t = -P$, $N = N^t$, $M = M^t$. A questo punto non è difficile calcolare la dimensione dell'algebra simplettica esibendone esplicitamente una base . Infatti , per ottenere L e P, basta prendere le matrici diagonali $e_{i\,i} - e_{n+i,n+i}$ $(1 \le i \le n)$, e le matrici $e_{i\,j} - e_{n+j,n+i}$ $(1 \le i \ne j \le n)$. Sono in tutto $n + (n^2-n) = n^2$ elementi. Per ottenere M, basta prendere le matrici $e_{i,n+i}$ $(1 \le i \le n)$, e le matrici $e_{i,n+j} + e_{j,n+i}$ $(1 \le i < j \le n)$. Analogamente per N. Sono in tutto $2(n + (1/2)n(n-1)) = n + n^2$ elementi. Si conclude che $\dim sp(2n,F) = 2n^2 + n$. Notiamo infine che la condizione $L^t = -P$ implica in particolare che X ha traccia zero. Dunque sp(V) è una sottoalgebra di sl(V).

$\mathbf{B_n}$:

Sia V uno spazio di dimensione dispari 2n+1 definito su un campo F *di caratteristica* $\ne 2$, e sia f la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Come nel caso di $\mathbf{C_n}$, l'insieme degli endomorfismi x di V tali che $f(x(u),v) = -f(u,x(v))$ per ogni $u,v \in V$, risulta essere una sottoalgebra di gl(V). Tale sottoalgebra viene denotata con **o(V)**, e prende il nome di **algebra ortogonale** (su V). L'algebra di matrici **o(2n+1,F)** consiste delle matrici X di gl(2n+1,F) soddisfacenti la condizione $AX = -X^tA$. Se decomponiamo X in blocchi :

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & L & M \\ e & N & P \end{bmatrix}$$

la condizione $X \in o(2n+1,F)$ si traduce nelle condizioni seguenti: $a = 0$, $d = -c^t$, $e = -b^t$, $P = -L^t$, $M = -M^t$, $N = -N^t$. In particolare $a = 0$ e $P = -L^t$ ancora implicano che X ha traccia nulla, e quindi o(V) è una sottoalgebra di sl(V). Possiamo costruire una base per o(V). Prendiamo innanzitutto le 2n matrici $e_{1,n+i+1} - e_{i+1,1}$, $e_{1,i+1} - e_{n+i+1,1}$ $(1 \le i \le n)$. Queste dispongono della prima riga e della prima colonna di X . Per ottenere L e P, scegliamo le n matrici diagonali $e_{i\,i} - e_{n+i,n+i}$ $(2 \le i \le n+1)$ e le n^2-n matrici $e_{i+1,j+1} - e_{n+j+1,n+i+1}$ $(1 \le i \ne j \le n)$. Per ottenere M prendiamo le n(n-1)/2 matrici $e_{i+1,n+j+1} - e_{j+1,n+i+1}$ $(1 \le i < j \le n)$; similmente, per N scegliamo $e_{n+i+1,j+1} - e_{n+j+1,i+1}$ $(1 \le j < i \le n)$. Complessivamente abbiamo $2n^2+n$ matrici , che formano evidentemente una base per o(2n+1,F) . In particolare, dim $\mathbf{B_n}$ = dim $\mathbf{C_n}$.

$\mathbf{D_n}$:

Sia V uno spazio di dimensione pari 2n su un campo F *di caratteristica* $\ne 2$, e sia f la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Gli endomorfismi x di V tali che $f(x(u),v) = -f(u,x(v))$ per ogni $u,v \in V$ formano un'altra **algebra ortogonale** , ancora denotata con **o(V)** . La corrispondente algebra di matrici **o(2n,F)** consiste delle matrici X di gl(2n,F) soddisfacenti la condizione $AX = -X^tA$, ovvero , decomponendo X in blocchi $n \times n$:

$$X = \begin{bmatrix} L & M \\ N & P \end{bmatrix}$$

soddisfacenti le condizioni $P = -L^t$, $M = -M^t$, $N = -N^t$. Si riconosce che o(V) è ancora una sottoalgebra di sl(V), e che le matrici $e_{ii} - e_{n+i,n+i}$ $(1 \leq i \leq n)$, $e_{i,j} - e_{n+j,n+i}$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$, $e_{i,n+j} - e_{j,n+i}$ $(1 \leq i < j \leq n)$, $e_{n+i,j} - e_{n+j,i}$ $(1 \leq j < i \leq n)$ formano una base per o(2n,F) . In particolare dim $\mathbf{D_n} = 2n^2 - n$.

III) Altre notevoli algebre lineari

Introduciamo ora alcune algebre lineari che giocano un ruolo importante nello studio delle algebre di Lie nilpotenti e risolubili.
Denotiamo con **t(n,F)** lo spazio delle **matrici triangolari alte** (i.e. delle matrici (a_{ij}) con $a_{ij} = 0$ per $i > j$) di ordine n a elementi in F. Si verifica immediatamente che t(n,F) è chiuso rispetto al bracket, e quindi è una sottoalgebra di gl(n,F). t(n,F) contiene come sottoalgebre l'algebra **st(n,F)** delle **matrici strettamente triangolari alte** (i.e. con $a_{ii} = 0$), e l'algebra **d(n,F)** delle **matrici diagonali**.
Notiamo che **t(n,F) = d(n,F) ⊕ st(n,F)** (somma diretta di sottospazi). D'altra parte è **[d(n,F),st(n,F)] = st(n,F)** (basta osservare che, per ogni $i < j$, è $[e_{ii}, e_{ij}] = \delta_{ii} e_{ij} - \delta_{ji} e_{ii} = e_{ij}$), donde, essendo d(n,F) abeliana, si ha : **[t(n,F),t(n,F)] = st(n,F)**.

3. Ideali e omomorfismi. Rappresentazioni.

Definizione 1. *Un sottospazio I di un'algebra di Lie L si dice* **ideale** *di L se , per ogni $x \in L$ e per ogni $i \in I$, è $[x\, i] \in I$ (o equivalentemente $[i\, x] \in I$). In altre parole, un sottospazio I è un ideale sse $I \supseteq [L\, I]$.*

$\underline{\mathbf{0}}$ (il sottospazio di L formato dal solo vettore 0) e **L** stessa, sono naturalmente degli ideali (banali) di L.
Un importante esempio di ideale è dato da **[LL]** , che prende il nome di **commutatore** (o **algebra derivata**) di L. Ovviamente *L è abeliana sse è $[LL] = \underline{0}$* . Altro importante esempio di ideale è dato dal **centro** di L, che è l'insieme **Z(L)** = $\{z \in L \mid [zx] = 0, \forall x \in L\}$. Ovviamente *L è abeliana sse Z(L) = L.*

Osservazione. Se I,J sono degli ideali di un'algebra di Lie L, allora la somma I + J e l'intersezione $I \cap J$ sono degli ideali di L. E in generale, *il bracket [I J] di due ideali è un ideale* , dal momento che , per l'identità di Jacobi, [L [I J]] è contenuto in [I [J L]] + [J [L I]].

Definizione 2. *Un'algebra di Lie L si dice* **semplice** *se non ammette ideali diversi da $\underline{0}$ e da L , e se inoltre $[LL] \neq \underline{0}$* . (L'ultima condizione equivale a chiedere dim L > 1)
In particolare, *se L è semplice, $[LL] = L$ e $Z[L] = \underline{0}$* .

Esempio: *Se car F ≠ 2, l'algebra speciale lineare sl(2,F), è semplice .*
Infatti : scelta la base standard $x = e_{12}$, $y = e_{21}$, $h = e_{11} - e_{22}$ il bracket in L = sl(2,F) è determinato da [xy] = h, [hx] = 2x, [hy] = -2y. Sia ora I un ideale di L, e sia $0 \neq i = ax + by + ch \in I$. Allora $[x\, i] = bh - 2cx$, e quindi $[x[x\, i]] = -2bx \in I$. Similmente, $[y\, i] = -ah + 2cy$, e quindi $[y[y\, i]] = -2ay \in I$. Ne segue che, se a e b non sono entrambi nulli, I contiene x oppure y, e in tal caso contiene tutta la base (x,y,h), e dunque coincide con L. Se a = b = 0, i = ch, e dunque $h \in I$, e ancora I = L.
(*Se car F = 2*, [LL] = < h >, e dunque L non è semplice.)

Oss. Vedremo in seguito che non solo sl(2,F), ma in generale sl(n,F), e tutte le algebre classiche introdotte nella sezione precedente sono algebre semplici, se F è un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero. E già ora, è facile verificare calcolando i brackets degli elementi delle basi standard, che se car F = 0 è [LL] = L per ogni algebra L di tipo A_n, B_n, C_n, D_n.

Come nel caso degli ideali (bilateri) in teoria degli anelli associativi, gli ideali in teoria di Lie sono i nuclei degli omomorfismi :

Definizione 3. *Siano L_1, L_2 algebre di Lie su un campo F. Un'applicazione lineare $\phi : L_1 \to L_2$ si dice* **omomorfismo** *se , per ogni $x,y \in L_1$, $\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)]$. ϕ è un* **monomorfismo** *se Ker ϕ = 0, un* **epimorfismo** *se Im $\phi = L_2$, un* **isomorfismo** *(d'accordo con Def.1.5) se è sia mono che epi.*

La prima osservazione è che, se ϕ è un omomorfismo, *Ker ϕ è un ideale di L_1* (infatti, per ogni $x \in L_1$, $i \in$ Ker ϕ, è $\phi[x\ i] = [\phi(x)\phi(i)] = [\phi(x)\ 0] = 0$), e *$\phi(L_1)$ = Im ϕ è una sottoalgebra di L_2.*

D'altra parte, proprio come per gli anelli associativi, ogni ideale I di un'algebra di Lie L dà luogo a un'algebra di Lie quoziente. Più precisamente:

Lemma. *Sia I un ideale di un'algebra di Lie L. Allora sullo spazio quoziente L/I la formula :*

$$[\mathbf{x + I\ ,\ y + I}] = [\mathbf{xy}] + \mathbf{I} \quad \text{per ogni } x,y \in L$$

definisce un prodotto non-associativo rispetto al quale L/I acquista la struttura di algebra di Lie. Quest'algebra è l' **algebra quoziente L/I**.

Dim. Ci limitiamo a notare che il prodotto é ben definito in L/I. Se infatti x+I = x'+I, y+I = y'+I, si ha $[x'y'] +I = [(x+i)(y+i')] +I = ([xy] +[iy] +[xi'] +[ii']) +I = [xy] +I$, essendo I un ideale. E dunque $[x'+I,y'+I] = [x+I,y+I]$.

Orbene, *la* **proiezione canonica** $\pi : L \to L/I$, i.e. l'applicazione $x \to x + I$, *è un epimorfismo avente nucleo I.*

Valgono gli usuali teoremi sugli omomorfismi, riassunti nel seguente :

Teorema. *i) Sia $\phi : L_1 \to L_2$ un omomorfismo fra algebre di Lie. Allora ϕ induce un isomorfismo fra l'algebra quoziente L_1/Ker ϕ e Im ϕ. Se I è un qualsiasi ideale di L_1 contenuto in Ker ϕ, esiste uno e un solo omomorfismo $\psi : L_1/I \to L_2$ tale che $\phi = \psi \cdot \pi$ (π = proiezione canonica da L_1 a L_1/I)* (ψ è l'applicazione $x + I \to \phi(x)$).
ii) Siano I,J ideali di un'algebra di Lie L, e si supponga $J \supseteq I$. Allora J/I è un ideale di L/I, e L/J è isomorfa in modo naturale a (L/I)/(J/I). Inversamente, ogni ideale J' di L/I ha la forma J/I, ove J è un ideale di L contenente I ($J = \pi^{-1}(J')$).
iii) Siano I,J ideali di L. Allora l'algebra (I + J)/I è isomorfa in modo naturale all'algebra $J/(I \cap J)$.

Dim. Esercizio.

Esercizi:
1) Sia $\phi : L \to M$ un epimorfismo di algebre di Lie. M è abeliana sse Ker $\phi \supseteq [LL]$.
2) I nuclei degli omomorfismi di un'algebra di Lie L in algebre abeliane sono tutti e soli i sottospazi di L che contengono [LL].

Definizione 4. *Una* **rappresentazione** *di un'algebra di Lie L su uno spazio vettoriale V (anche di dimensione infinita) su un campo F, è un omomorfismo $\phi : L \to gl(V)$.*

Una rappresentazione naturale di una qualsiasi algebra di Lie L su se stessa è fornita dalla mappa aggiunta:

Proposizione. *Sia L un'algebra di Lie. L'applicazione* **ad : L → gl(L),** *che associa ad ogni $x \in L$ la mappa aggiunta ad $x : y \to [xy]$, $\forall\ y \in L$, è una rappresentazione di L, che prende il nome di* **rappresentazione aggiunta** ("adjoint representation") *di L.*

Dim. Ci limitiamo ad osservare che, per ogni $x,y,z \in L$, si ha : ad $[xy](z) = [[xy]\ z] = [x[yz]] + [y[zx]] = [x[yz]] - [y[xz]] = (\text{ad } x \cdot \text{ad } y)(z) - (\text{ad } y \cdot \text{ad } x)(z) = [\text{ad } x, \text{ad } y](z)$.

Osservazioni :

1) **ad L $\subseteq$ Der(L)**, essendo L di Lie. D'altronde, per ogni $x,y \in L$, $\delta \in Der(L)$, si ha $(\delta\, ad\, x - ad\, x\, \delta)y = \delta[xy] - [x\, \delta y] = [\delta x\, y] = (ad\, \delta x)y$. Dunque $[\delta, ad\, x] = ad\, \delta x$, e pertanto *ad L è un ideale di Der(L)*.

2) **Ker ad = Z(L)**. Infatti $Ker\, ad = \{x \in L \mid ad\, x = 0\} = \{x \in L \mid [xy] = 0, \forall\, y \in L\}$.

Segue in particolare da 2) che *ogni algebra semplice è isomorfa, via ad, a un'algebra lineare.*

4. Moduli e rappresentazioni

Noi assumiamo in questo corso di lezioni che al lettore siano familiari la nozione di *modulo su un anello associativo A* (o *A-modulo*), e la teoria elementare degli A-moduli. Ricordiamo tuttavia esplicitamente che:
1) Assegnati un gruppo abeliano additivo M e un anello associativo A (con unità 1_A), si dice che M è un A-modulo (sinistro) se è definita un'applicazione $A \times M \to M$ tale che $(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m$, $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$, $(aa_1)m = a(a_1m)$, $1_Am = m$, per ogni $a, a_1, a_2 \in A$; $m, m_1, m_2 \in M$. Gli endomorfismi dell'A-modulo M (i.e. gli endomorfismi f del gruppo abeliano M che 'commutano' con gli elementi di A, cioè tali che $f(am) = af(m)$ per ogni $a \in A$, $m \in M$), formano un sottoanello dell'anello End(M), che denotiamo con $End_A(M)$.
2) Se in particolare A è un'algebra associativa su un campo F (cf. 1.,Def.1), definendo come prodotto esterno, per ogni $\alpha \in F$, $m \in M$, $\alpha\, m = (\alpha 1_A)m$, M ha anche la struttura di spazio vettoriale su F.
3) Se, nelle ipotesi di 2), si suppone inoltre che A sia finito-dimensionale su F e che M sia finitamente generato su A, si riconosce subito che M ha dimensione finita su F. E poichè $End_F(M) \supseteq End_A(M) \supseteq F \cdot 1_M$ [infatti, per ogni $f \in End_A(M)$, è $f(\alpha\, m) = f((\alpha 1_A)m) = (\alpha 1_A)f(m) = \alpha\, f(m)$, e $\alpha(am) = (\alpha 1_A)am = ((\alpha 1_A)a)m = (\alpha a)m = (a(\alpha 1_A))m = a((\alpha 1_A)m) = a(\alpha m)$], si può allora considerare $End_A(M)$ come una sottoalgebra dell'algebra $End_F(M)$ (a fortiori di dimensione finita su F).

In modo del tutto simile al caso di un'algebra associativa, definiremo ora la nozione di modulo sopra un'algebra di Lie.

Sia L un'algebra di Lie sul campo F, e sia V uno spazio vettoriale, che supporremo *di dimensione finita* su F (salvo esplicito avviso contrario).

Definizione 1. *Si dice che V è un* **L-modulo** *(ovvero : che L* opera *sullo spazio V) se è definita un'operazione* $\cdot : L \times V \to V$ *tale che, per ogni* $a,b \in F$; $x,y \in L$; $v,w \in V$, *sia:*

i) $(ax + by)v = a(xv) + b(yv)$
ii) $x(av + bw) = a(xv) + b(xw)$
iii) $[xy]v = xyv - yxv$.

Dato un L-modulo V, ad esso corrisponde la rappresentazione $\phi : L \to gl(V)$ definita ponendo, per ogni $x \in L$, $v \in V$, $\phi(x)v = xv$. (Le proprietà i), ii) e iii) assicurano precisamente che $\phi(x) \in gl(V)$ e che ϕ è un omomorfismo di algebre di Lie.)
Inversamente, data una rappresentazione $\phi : L \to gl(V)$ dell'algebra di Lie L sullo spazio V, ponendo, per ogni $x \in L$, $v \in V$, $xv = \phi(x)v$, V acquista la struttura di L-modulo.
Resta così stabilita una naturale corrispondenza biunivoca fra L-moduli e rappresentazioni di L, che permette di usare il linguaggio dei moduli in luogo di quello delle rappresentazioni, e di interpretare i risultati della teoria dei moduli in termini di rappresentazioni, e inversamente.

Definizione 2. *Siano V, W L-moduli su un campo F. Un'applicazione lineare* $f : V \to W$ *si dice* **omomorfismo** *(di L-moduli) se, per ogni* $x \in L$, $v \in V$ *è* $f(xv) = xf(v)$. *f é un* **isomorfismo** *se è 1-1.*
Se V e W sono isomorfi, si dice che le corrispondenti rappresentazioni sono **equivalenti**.

Definizione 3. *Un sottospazio U di un L-modulo V è un* **L-sottomodulo** *(o semplicemente, un* **sottomodulo***) se, per ogni $x \in L$, $u \in U$, è $xu \in U$.*
E.g., il nucleo di un omomorfismo $f : V \to W$ di L-moduli è un sottomodulo di V, mentre l'immagine f(V) è un sottomodulo di W.
Osserviamo esplicitamente che tutti gli usuali teoremi sugli omomorfismi valgono per gli L-moduli. Ne lasciamo enunciazione e verifica al lettore (cf. anche, più avanti, l'Osservazione che precede la Prop. 1).

Per lo studio delle rappresentazioni, hanno fondamentale importanza le nozioni seguenti:

Definizione 4. *Un L-modulo V si dice* **irriducibile** *se $V \neq \underline{0}$ e V non ha sottomoduli diversi da V e da $\underline{0}$,* **riducibile** *in caso contrario.*
Un L-modulo V si dice **completamente riducibile** *se è somma diretta di sottomoduli irriducibili.*
(E ovviamente, si dirà che una rappresentazione $\phi : L \to gl(V)$ è risp. irriducibile, riducibile, completamente riducibile se lo è il corrispondente L-modulo V.)

Esempio 1 : In base alla definizione precedente, sono irriducibili gli L-moduli 1-dimensionali. Essi corrispondono alle rappresentazioni $\phi : L \to F$, ove F è identificato all'algebra 1-dimensionale gl(1,F). Queste rappresentazioni sono le forme lineari $L \to F$ che annullano [LL] (i.e. tali che $\phi[xy] = 0 \ \forall\ x,y \in L$), e prendono il nome di **caratteri** di L. In particolare, il carattere nullo è detto *banale*, e il corrispondente modulo è il *modulo 1-dimensionale banale*.

Esempio 2 : Si consideri la rappresentazione aggiunta ad: $L \to gl(L)$. Allora L è un L-modulo (il *modulo aggiunto* di L) per l'azione $xv = (\mathrm{ad}\, x)v = [xv]$, $\forall\ x,v \in L$. I sottomoduli di L sono precisamente gli ideali di L. Dunque, il modulo aggiunto di un'algebra L è irriducibile sse L è semplice o abeliana 1-dimensionale; ed è completamente riducibile sse L è somma diretta di ideali semplici o abeliani 1-dimensionali.

Da un punto di vista generale, è importante fare la seguente :

Osservazione :
Se V è un L-modulo, e $\phi : L \to gl(V)$ è la corrispondente rappresentazione di L, possiamo considerare la sottoalgebra $E_{\phi(L)}$ generata nell'algebra associativa End(V) da 1_V e da $\phi(L)$. $E_{\phi(L)}$ è la cosiddetta *algebra inviluppante* di $\phi(L)$ (in End(V)). E' chiaro che V può essere considerato sia come L-modulo che come $E_{\phi(L)}$-modulo, e che *i sottomoduli di V, considerato come L-modulo, coincidono con i sottomoduli di V, considerato come $E_{\phi(L)}$-modulo. Ne consegue che i teoremi fondamentali sulla struttura dei moduli su algebre associative, valgono altresì per gli L-moduli.*

In particolare, vale l'usuale caratterizzazione della completa riducibilità, di cui diamo dimostrazione diretta:

Proposizione 1. *Per un L-modulo $V \neq \underline{0}$ (non necessariamente finito-dimensionale su F) sono equivalenti gli enunciati seguenti :*

i) V è somma di sottomoduli irriducibili;
ii) V è completamente riducibile;
iii) per ogni sottomodulo U di V esiste un sottomodulo U' tale che $V = U \oplus U'$ (i.e. ogni sottomodulo di V ha un complemento).

Dim. i) $\Rightarrow$ ii) : Sia $V = \sum_{i \in I} V_i$, V_i irriducibili, e sia $J \subseteq I$ massimale rispetto alla proprietà che $V' = \sum_{j \in J} V_j$ sia diretta. Per ogni $i \in I - J$, $V_i \cap V' = \underline{0}$ implica che $V'+V_i$ è diretta, contro la massimalità di J. Dunque, essendo V_i irriducibile, è $V_i \cap V' = V_i$, ovvero $V_i \subseteq V'$. Si conclude che $V' = V$, dunque V è completamente riducibile.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Sia $V = \sum_{i \in I} V_i$, V_i irriducibili. Sia U un sottomodulo di V, e sia $J \subseteq I$ massimale rispetto alla proprietà che la somma $V' = U + \sum_{j \in J} V_j$ sia diretta. Per ogni $i \in I - J$, si ha come sopra $V_i \cap V' = V_i$. Dunque V' = V, e $U' = \sum_{j \in J} V_j$ è un complemento di U in V.

iii) $\Rightarrow$ i) : Proviamo innanzitutto che, se V soddisfa iii), ciò vale per ogni sottomodulo W di V. Sia infatti W_0 un qualsiasi sottomodulo di W. Allora W_0 ha un complemento W_0' in V. Ma allora $W_0' \cap W$ è un complemento di W_0 in W. Infatti, se $w = x+y \in W$, con $x \in W_0$, $y \in W_0'$, allora $y = w-x \in W$, e quindi $y \in W_0' \cap W$.
Proviamo ora che ogni sottomodulo $S \neq \underline{0}$ di V contiene un sottomodulo irriducibile. A tale scopo, sia $0 \neq s \in S$, e S_1 un sottomodulo di S massimale rispetto alla proprietà di *non* contenere s. Per quanto visto sopra, $S = S_1 \oplus S_2$, con S_2 sottomodulo di S. Affermiamo che S_2 è un sottomodulo irriducibile di S. Infatti in caso contrario, sarebbe $S_2 = S_3 \oplus S_4$, con S_3, S_4 sottomoduli $\neq \underline{0}$. Per la massimalità di S_1 , seguirebbe $s \in (S_1 \oplus S_3) \cap (S_1 \oplus S_4)$, donde $s \in S_1$, assurdo.
Sia ora U la somma di tutti i sottomoduli irriducibili di V. Se fosse $U \subset V$, si avrebbe $V = U \oplus U'$, U' sottomodulo $\neq \underline{0}$. Ma allora U' dovrebbe contenere un sottomodulo irriducibile, che quindi dovrebbe stare in U, assurdo. Dunque è U = V, e si ha l'asserto.

Un altro fondamentale risultato necessario per il seguito è il cosiddetto "lemma di Schur" :

Teorema 1 (Lemma di Schur) *Sia A un'algebra associativa avente dimensione finita su un campo F algebricamente chiuso, e sia M un A-modulo irriducibile, finitamente generato su A. Allora* $End_A(M) = F \cdot 1_M$ *(= moltiplicazioni scalari).*

Dim. Osserviamo innanzitutto che se $\underline{0} \neq f \in End_A(M)$, l'irriducibilità di M implica Ker f = $\underline{0}$ e f(M) = M. Dunque f è bijettivo, ovvero invertibile, e $End_A(M)$ è un corpo.
Sia $f \in End_A(M)$. Poichè (cf. le osservazioni all'inizio di questo paragrafo), $End_A(M)$ è un'algebra di dimensione finita su F, gli elementi $1_M = f^0, f, f^2, \ldots$ sono l. dipendenti su F. Dunque esiste un polinomio monico $\delta(t) \in F[t]$ tale che $\delta(f) = 0_M$. Poichè F è algebricamente chiuso, $\delta(t) = (t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_s)$, ove $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in F$. E poichè f commuta con gli elementi di F , ne segue $0_M = \delta(f) = (f - \alpha_1 1_M) \cdots (f - \alpha_s 1_M)$. Ma $End_A(M)$ è un corpo, dunque $f = \alpha_i 1_M$, per qualche i.

Se $\phi : L \to gl(V)$ è una rappresentazione irriducibile di un'algebra di Lie L, applicando il Lemma di Schur a V considerato come modulo sull'algebra inviluppante $E_{\phi(L)}$, si ottiene la seguente :

Proposizione 2. *Sia* $\phi : L \to gl(V)$ *una rappresentazione irriducibile di un'algebra di Lie L su un campo algebricamente chiuso F. Allora i soli endomorfismi di V che commutano con tutti gli elementi di* $\phi(L)$ *sono le moltiplicazioni scalari.*